باسمه تعالی

شناسایی سیستم‌ها

عنوان:

حل دو نمونه مسائل شناسایی سیستم و تخمین

مسئله اول

اثبات کنید با فرض $P(A_1 \cap A_2 \ldots\ldots \cap A_n) > 0$ **آنگاه:**

$$P(A_1 \cap A_2 \ldots\ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1) \ldots . P(A_n | A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

با استفاده از اصل استقرا ابتدا برای $n = 2$ قضیه را اثبات می کنیم(برای دو مجموعه جدا از هم)، سپس با فرض $n = k$ مسئله را به عنوان فرض اصلی در نظر می گیریم و قضیه را برای $n = k + 1$ اثبات می کنیم.

لذا داریم:

$$\begin{cases} n = 2 \Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) \\ n = k \Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \ldots\ldots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2 | A_1) \ldots . P(A_k | A_1 A_2 \ldots A_{k-1}) \\ n = k + 1 \Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \ldots\ldots \cap A_{k+1}) = P(A_1)P(A_2 | A_1) \ldots . P(A_{k+1} | A_1 A_2 \ldots A_k) \end{cases}$$

حال با فرض درستی روابط برای $n = 2, k$ برای اثبات $n = k + 1$ تلاش می کنیم،پس:

$$\begin{cases} A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_k = B \\ A_{k+1} = C \\ D = P(A_1)P(A_2 | A_1) \ldots P(A_k | A_1 \ldots A_{k-1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} farz : P(B) = D \\ hokm : P(B \cap C) = DP(C | B) \end{cases}$$

که چون فرض ما برای $n = 2$ درست می باشد لذا از آن استفاده می کنیم و داریم:

$$P(B \cap C) = DP(C | B) \Rightarrow P(B \cap C) = P(B)P(C | B)$$

که این نشان دهنده این است که ما فرض $n = k + 1$ را نیز به اثبات رساندیم لذا قضیه برقرار است.

مسئله دوم

با فرض های زیر امید و کوواریانس y را به دست بیاورید:

$$\begin{cases} Y=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix} & P_x=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\\ E(\mathrm{Y}),\mathrm{Cov}(\mathrm{Y}) & E(\mathrm{X})=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}\end{cases}$$

که با فرض زیر و با استفاده از نرم افزار متلب چنین خواهد شد:

$$Y=HX+V\Rightarrow E(\mathrm{Y})=\mathrm{HE(X)}+\mathrm{V}=\begin{bmatrix}-3\\ 14\end{bmatrix}$$

و برای به دست آوردن کوواریانس نیز خواهیم داشت:

$$Y=HX+V\Rightarrow\begin{cases} P_y=E((\mathrm{Y}-\mathrm{E(y)})(\mathrm{Y}-\mathrm{E(y)}^T))=\mathrm{H}(\mathrm{P}_x+\bar{\mathrm{X}}\bar{\mathrm{X}}^T)\mathrm{H}^T+H\bar{\mathrm{X}}V^T+V\bar{\mathrm{X}}^T H^T+\bar{V}\bar{V}^T\\ P_v=E((\mathrm{V}-\mathrm{E(V)})(\mathrm{V}-\mathrm{E(V)}^T)),\mathrm{E(X)}=\bar{\mathrm{X}}\end{cases}$$

که با متلب نتیجه چنین خواهد شد:

$$Cov(\mathrm{y})=\begin{bmatrix}7 & -41\\ -41 & 209\end{bmatrix}$$